План
"1-2"

Вступ... 3
Глава 1. Теоретична частина 4
Основні поняття теорії графів 4
Маршрути і зв'язність 6
Задача про Кенігсберські мости 7
Ейлерові графи 9
Оцінка числа ейлеровим графам 13
Алгоритм побудови кола в ейлеровім графі. 14
Глава 2. Практична частина 15
Висновок 24
Література 25

Вступ

Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася в 1736г. Спочатку теорія графів здавалася досить незначним розділом математики, так як вона мала справу в основному з математичними розвагами й головоломками. Однак подальший розвиток математики і особливо її додатків дало сильний поштовх розвитку теорії графів.Вже в XIX столітті графи використовувалися при побудові схем. В даний час ця теорія знаходить численне застосування в різноманітних практичних питаннях: при встановленні різного роду відповідностей, при вирішенні транспортних задач, задач про рух інформації, у мережі нафтопроводів, в програмуванні та теорії ігор, теорії передачі повідомлень. Теорія графів тепер застосовується і в таких областях, як економіка, психологія і біологія. У цій роботі ми докладніше розглянемо Ейлерові графи, основні відомості і теореми, пов'язані з цим поняттям. А також завдання, які розв’язуються за допомогою ейлерових графів.

Розділ1.Основні поняття теорії графів.

Поняття графа доцільно вводити після того, як розібрано кілька завдань, подібних завданні 1, вирішальна увага в яких – графічне подання. Важливо, щоб учні відразу усвідомили, що один і той же граф може бути намальований різними способами. Строге визначення графа, на мій погляд, давати не потрібно, оскільки воно надто громіздке і це тільки ускладнить обговорення. На перших порах вистачить і інтуїтивного поняття. При обговоренні поняття ізоморфізму можна розв'язати кілька вправ на визначення ізоморфних та неізоморфних графів . Одне з центральних місць теми – теореми парності числа непарних вершин. Важливо, щоб учні до кінця розібралися в її доведенні і навчилися застосовувати до розв'язування задач. При розв’язуванні декількох завдань рекомендую не посилатися на теорему, а фактично повторювати її доведення. Надзвичайно важливо також поняття зв'язності графа. Змістовним міркуванням тут є розгляд компоненти зв'язності, на це необхідно звернути особливу увагу.

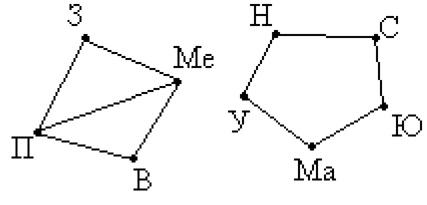
Ейлерові графи

Ейлерові графи – тема майже ігрова. Перша і головна мета, яку потрібно переслідувати при вивченні графів, –навчити школярів бачити граф в умові задачі і грамотно перекладати умову на мову теорії графів. Графи – чудові математичні об'єкти, з їх допомогою можна вирішувати дуже багато різних, зовні не схожих один на одного завдань. У математиці існує цілий розділ – теорія графів, який вивчає графи, їх властивості і застосування. Ми ж обговоримо тільки самі основні поняття, властивості графів і деякі способи розв’язування завдань.

Розглянемо дві задачі.

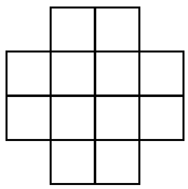
Завдання 1. Між дев'ятьма планетами Сонячної системи встановлено космічне повідомлення. Рейсові ракети літають за наступними маршрутами: Земля – Меркурій; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурій; Меркурій – Відні; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпітер; Юпітер – Марс Марс – Уран. Чи можна долетіти на рейсових ракетах з Землі до Марса ?

Розв’язання*:* Намалюємо схему умови: планети зобразимо точками, а маршрути ракет – лініями.



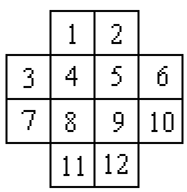
Тепер відразу видно, що долетіти від Землі до Марса не можна.

Завдання 2. Дошка має форму подвійного хреста, який виходить, якщо з квадрата 4х4 прибрати кутові клітини.

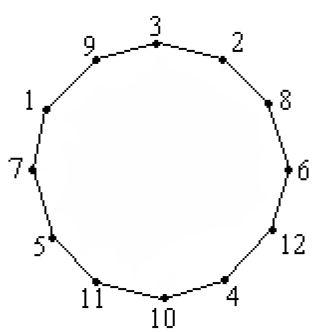


Чи можна обійти її ходом шахового коня і повернутися на вихідну клітку, побувавши на всіх клітинах рівно по одному разу ?

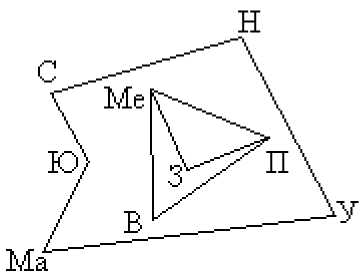
Розв’язання*:* Пронумеруємо послідовно клітини дошки:



А тепер з допомогою малюнка покажемо, що такий обхід таблиці, як вказано в умові, можливий:



Ми розглянули дві несхожі завдання. Однак вирішення цих двох завдань об'єднує спільна ідея – графічне представлення рішення. При цьому і картинки, намальовані для кожної задачі, виявилися схожими: кожна картинка – це кілька точок, деякі з яких з'єднані лініями. Такі картинки і називаються графами. Точки при цьому називаються вершинами, а лінії – ребрами графа. Зауважимо, що не кожна картинка такого вигляду називатиметься графом. Наприклад. якщо вас попросять намалювати в зошиті п'ятикутник, то такий малюнок графом не буде. Будемо називати що малюнок такого виду, як в попередніх задачах, графом, якщо є якась конкретна задача для якої такий малюнок побудований. Інше зауваження стосується виду графа. Спробуйте перевірити, що граф для однієї і тієї ж задачі можна намалювати різними способами; і навпаки, для різних завдань можна намалювати однакові за видом графи. Тут важливо лише те, які вершини з'єднані один з одним, а які – ні. Наприклад, граф для завдання 1 можна намалювати по-іншому:



Такі однакові, але по-різному намальовані графи, називаються ізоморфними.

Степені вершин і підрахунок числа ребер графа

Запишемо ще одне означення: Степенем вершини графа називається кількість ребер, які виходять з неї. У зв'язку з цим, вершина, що має парну степінь, називається парної вершиною, відповідно, вершина, що має непарну ступінь, називається непарної вершиною.З поняттям ступеня вершини пов'язана одна з основних теорем теорії графів –теорема про парність числа непарних вершин. Доведемо її ми трохи пізніше, а спочатку для ілюстрації розглянемо задачу.

Завдання 3. У місті Маленькому 15 телефонів. Чи можна їх поєднати проводами так, щоб кожен телефон був з'єднаний рівно з п'ятьма іншими ? *Розв'язання:* Припустимо, що таке з'єднання телефонів можливо. Тоді уявімо собі граф, в якому вершини позначають телефони, а ребра – проводи, що з'єднують їх. Підрахуємо, скільки всього вийде проводів. До кожного телефону підключено рівно 5 проводів, тобто ступінь кожної вершини нашого графа – 5. Щоб знайти число проводів, треба підсумувати степені всіх вершин графа і отриманий результат поділити на 2 (тому що кожний провід має два кінця, то при підсумовуванні ступенів кожен провід буде взято 2 рази). Але тоді кількість проводів вийде різна . Але це число не ціле. Значить, наше припущення про те, що можна поєднати кожен телефон рівно з п'ятьма іншими, виявилося невірним.

Відповідь. З'єднати телефони таким чином неможливо.

Теорема: Будь-який граф містить парне число непарних вершин.

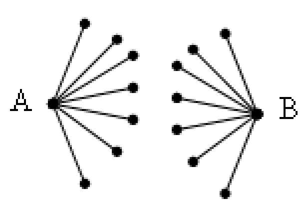
Доведення: Кількість ребер графа дорівнює половині суми ступенів його вершин. Так як кількість ребер має бути цілим числом, то сума степенів вершин повинна бути парної. А це можливо тільки в тому випадку, якщо граф містить парне число непарних вершин.

Зв'язність графа

Є ще одне важливе поняття, що відноситься до графів – поняття зв'язності. Граф називається зв'язним, якщо будь-які дві його вершини можна з'єднати шляхом, тобто безперервною послідовністю ребер. Існує цілий ряд завдань, розв’язаня яких грунтується на понятті зв'язності графа.

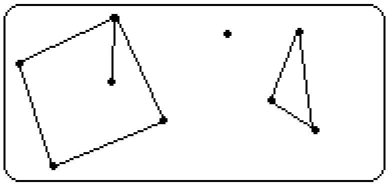
Завдання 4. В країні Сімка 15 міст, кожне з міст з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими. Доведіть, що з кожного міста можна дістатися до будь-якої іншої.

Доведення: Розглянемо два довільних А і В міста і припустимо, що між ними немає шляху. Кожен з них з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими, причому немає такого міста, який був би з'єднаний з обома розглядуваними містами (в іншому випадку існував би шлях з А в В). Намалюємо частину графа, що відповідає цим містам:



Тепер явно видно, що ми отримали не менше 16 різних міст, що суперечить умові задачі. Отже твердження доведено протилежного. Якщо взяти до уваги попереднє визначення, то твердження задачі можна переформулювати й по-іншому: "Довести, що граф доріг країни Сімка зв’язний."

Тепер ви знаєте, як виглядає зв'язний граф. Незв'язний граф має вигляд кількох "шматків", кожен з яких – окрема вершина без ребер, або зв'язний граф. Приклад графа ви бачите на малюнку:



Кожен такий окремий шматок називається компонентою зв'язності графа. Кожна компонента зв'язності являє собою зв'язний граф і для неї виконуються всі твердження, які ми довели для зв'язних графів. Розглянемо приклад задачі, в якій використовується компонента зв'язності:

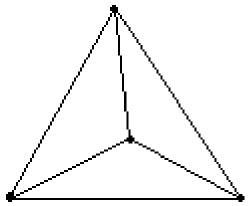
Завдання 5. У Тридев'ятому царстві тільки один вид транспорту – килим-літак. Зі столиці виходить 21 ковролінія, з міста Дальній – одна, а з усіх інших міст, – по 20. Доведіть, що зі столиці можна долетіти в місто Дальній.

Доведення: Зрозуміло, що якщо намалювати граф ковроліній Царства, то він обов'язково має бути суміжним. Розглянемо компоненту зв'язності, яка включає в себе столицю Царства. Зі столиці виходить 21 ковролінія, а з будь-яких інших міст, крім міста Дальній – по 20, тому, щоб виконувався закон про парне число непарних вершин необхідно, щоб і місто Дальній входив в цю ж саму компоненту зв'язності. А так як компонента зв'язності – зв'язний граф, то зі столиці існує шлях з ковроліній до міста Дальній, що і було потрібно довести.

Графи Ейлера

Ви напевно стикалися з завданнями, в яких потрібно намалювати будь-яку фігуру не відриваючи олівця від паперу і проводячи кожну лінію тільки один раз. Виявляється, що така задача не завжди розв'язана, тобто існують фігури, які вказаним способом намалювати не можна. Питання розв'язності таких завдань також входить в теорію графів. Вперше його досліджував в 1736 році великий німецький математик Леонард Ейлер, вирішуючи задачу про Кенігсбергські мости. Тому графи, які можна намалювати зазначеним способом, називають Ейлеровими графами.

Завдання 6. Можна намалювати зображений на малюнку граф не відриваючи олівця від паперу і проводячи кожне ребро рівно один раз ?



Розв'язання. Якщо ми будемо малювати граф так, як сказано в умові, то в кожну вершину, крім початкової і кінцевої, ми увійдемо стільки ж разів, скільки вийдемо з неї. Тобто всі вершини графа, крім двох повинні бути парними. У нашому ж графі є три непарні вершини, тому його не можна намалювати зазначеною в умові способом.

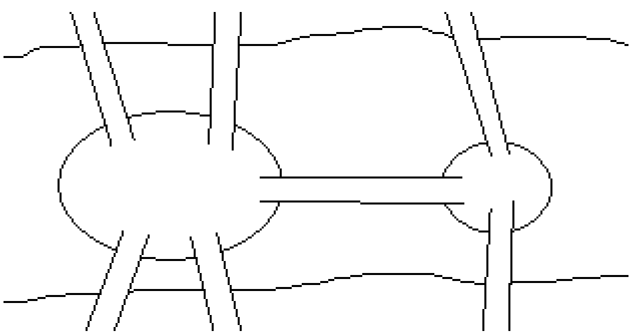
Зараз ми довели теорему по ейлерових графах:

Теорема: Ейлерів граф повинен мати не більше двох непарних вершин.

І на закінчення – задача про Кенігсбергські мости.

Завдання 7. На малюнку зображена схема мостів міста Кенігсберга.

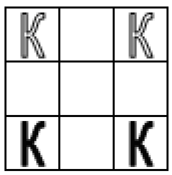
Можна зробити прогулянку так, щоб пройти по кожному мосту рівно 1 раз?

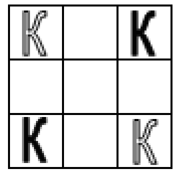


3. Завдання до теми "Графи"

1. На квадратній дошці 3x3 розставлені 4 коня так, як показано на рис.1. Можна зробивши кілька ходів кіньми, переставити їх в положення, показане на рис.2?

Рис.1 *Рис.2*

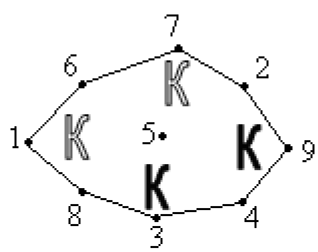


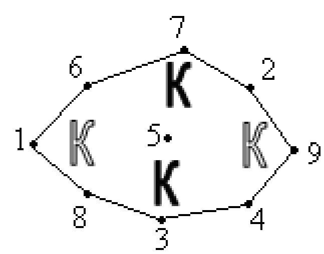


Розв’язання. Пронумеруємо клітинки дошки, як показано на малюнку:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Кожній клітці поставимо у відповідність точку на площині і, якщо з однієї клітини можна потрапити в іншу ходом шахового коня, то відповідні точки з'єднаємо лінією. Початкова та необхідна розстановки коней показані на малюнках:





При будь-якій послідовності ходів кіньми порядок їх слідування, очевидно, змінитися не може. Тому переставити коней необхідним чином неможливо.

2. В країні Цифра є 9 з назвами міст 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мандрівник виявив, що два міста з'єднані авіалінією в тому і тільки в тому випадку, якщо двозначне число, утворене назвами міст, ділиться на 3. Можна долетіти по повітрю з міста 1 в місто 9 ?

Розв’язання.. Поставивши у відповідність кожному місту точку і з'єднавши точки лінією, якщо сума цифр ділиться на 3, отримаємо граф, в якому цифри 3, 5, 9 пов'язані між собою, але не пов'язані з іншими. Значить долетіти з міста 1 в місто 9 не можна.

Ступені вершин і підрахунок числа ребер.

3. В державі 100 міст до кожного міста виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в державі.

Розв'язання.. Підрахуємо загальну кількість виходять міст доріг – 100 . 4 = 400. Однак при такому підрахунку кожна дорога порахована 2 рази – вона виходить з одного міста і входить в інше. Значить всього доріг в два рази менше, тобто 200.

4. У класі 30 осіб. Чи може бути так, що 9 осіб мають по 3 , 11 – по 4 , а 10 – по 5 друзів ?

Відповідь. Немає (теореми парності числа непарних вершин).

5. У короля 19 васалів. Може виявитися так, що у кожного васала 1, 5 або 9 сусідів ?

Відповідь. Ні, не може.

6. Може в державі, в якому з кожного міста виходить рівно 3 дороги, бути рівно 100 доріг?

Розв'язання. Підрахуємо число міст. Число доріг дорівнює числу міст х, помноженому на 3 (число виходять з кожного міста доріг) та розділеному на 2 (див. задачу 3). Тоді 100 = Вз/2 => 3х=200, чого не може бути при натуральному х. Значить 100 доріг в такій державі бути не може.

7. Доведіть, що число людей, що жили коли-небудь на Землі і зробили непарне число рукостискань, парна.

Доведення безпосередньо випливає з теореми парності числа непарних вершин графа.

Зв'язність.

8. У країні з кожного міста виходить 100 доріг і з кожного міста можна дістатися до будь-якого іншого. Одну дорогу закрили на ремонт. Доведіть, що і

тепер з будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого.

Доведення. Розглянемо компоненту зв'язності, в яку входить один з міст, дорогу між якими закрили. По теоремі про парності числа непарних вершин в неї входить і друге місто. А значить, як і раніше можна знайти маршрут і дістатися з одного з цих міст в інше

Графи Ейлера.

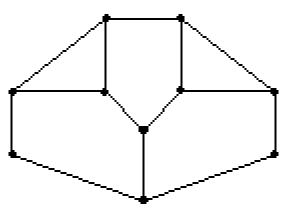
9. Є група островів, з'єднаних мостами так, що від кожного острова можна дістатися до будь-якого іншого. Турист обійшов всі острови, пройшовши по кожному мосту рівно 1 раз. На острові Триразовому він побував тричі. Скільки мостів веде з Триразового, якщо турист

а) не з нього почав і не на ньому закінчив?

б) з нього почав, але не на ньому закінчив?

в) з нього і почав на ньому закінчив?

10. На малюнку зображений парк, розділений на декілька частин парканами. Можна прогулятися по парку та його околицях так, щоб перелізти через паркан рівно 1 раз?



Висновок

У даній роботі були розглянуті основні поняття теорії графів, їх види. Велику увагу приділили питанню існування в них ейлерових ланцюгів і циклів, розглянули ряд теорем і властивостей. Описали алгоритм знаходження ейлерового циклу в довільному графі, а в практичній частині показали його застосування на конкретних прикладах. Відомо, що ейлерові графи отримали широке розповсюдження і популярність завдяки тому, що багато головоломок і завдання можна вирішити з використанням знань теорії графів. Приватні приклади таких головоломок і сюжетних завдань були приведені в практичній частині. Задачі на відшукання шляхів через лабіринти, близькі до завдань на ейлерові графи, знаходять застосування в сучасній психології і при конструюванні обчислювальних машин. Також з практичної точки зору, зараз графи застосовують у багатьох інших областях науки таких як: програмування, фізика, хімія, біологія, економіка і т.д.

Література

1. Андерсон, Джеймс А. Дискретна математика і комбінаторика: пров. з англ. - М.: Видавничий дім «Вільямс», 2003. - 960с.
2. Березіна Л. Ю. Графи і їхнє застосування. - М.: Просвещение, 1979.
3. Новіков С.А. Дискретна математика для програмістів - СПб.: Питер, 2001. - 304с.
4. Оре о. Графи і їхнє застосування. - М.: Світ, 1973.
5. Уілсон Р. Введення в теорію графів. - М.: Світ, 1977.
6. Харарі Ф. Теорія графів. - М.: Світ, 1973.